第 3 节 双曲线渐近线相关问题（★★★）

内容提要

圆锥曲线中，渐近线是双曲线独有的几何性质，渐近线相关考题较多，本节将归纳一些常见题型.

1．借助渐近线分析直线与双曲线的交点个数：

①当直线 l 过原点时，若其斜率 $k\in(-\infty,-\frac{b}{a}]\cup[\frac{b}{a},+\infty)$，则直线 l 与双曲线没有交点，如图 1；若 $k\in(-\frac{b}{a},\frac{b}{a})$，则直线 l 与双曲线有两个关于原点对称的交点，如图 2.

②当直线 l 过双曲线内部定点 P 时，若直线 l 的斜率 $k=\pm\frac{b}{a}$，即 l 与渐近线平行，则 l 与双曲线有 1 个交点，如图 3 中的 l_1 和 l_2；若直线 l 的斜率 $k\in(-\frac{b}{a},\frac{b}{a})$，则直线 l 与双曲线的两支各有 1 个交点，如图 3 中的 l；若 $k\in(-\infty,-\frac{b}{a})\cup(\frac{b}{a},+\infty)$，则直线与双曲线的同支有 2 个交点，如图 4 中的 l.

③当直线过双曲线外部定点 P（不与原点重合）时，分析交点个数还需借助切线，如图 5，l_1 和 l_4 是与渐近线平行的直线，l_2 和 l_3 是双曲线的两条切线，我们让直线 l 从 l_1 出发绕点 P 逆时针旋转，恰好为 l_1 时，与双曲线有 1 个交点；转到 l_1 和 l_2 之间时，与双曲线在同支有 2 个交点；恰好为 l_2 时，与双曲线有 1 个交点；在 l_2 和 l_3 之间时，没有交点；恰好为 l_3 时，有 1 个交点；在 l_3 和 l_4 之间时，与双曲线在同支有 2 个交点；恰好为 l_4 时，有 1 个交点；从 l_4 继续转回 l_1 的过程中，与双曲线在两支上各有 1 个交点.

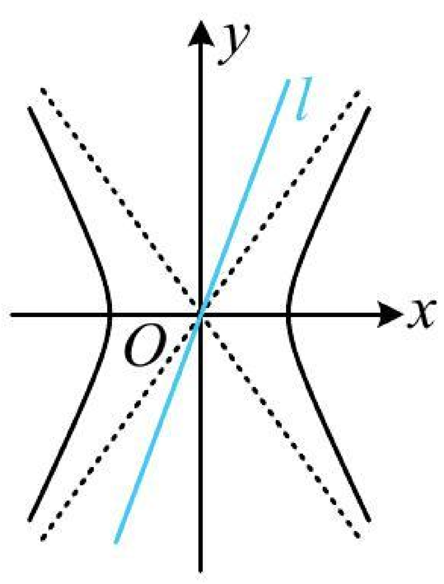


图1

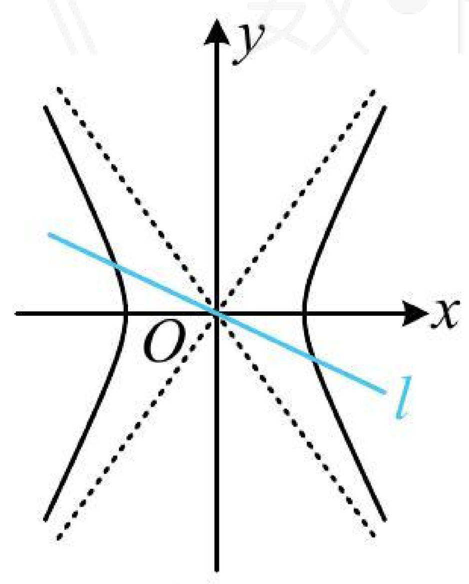


图2

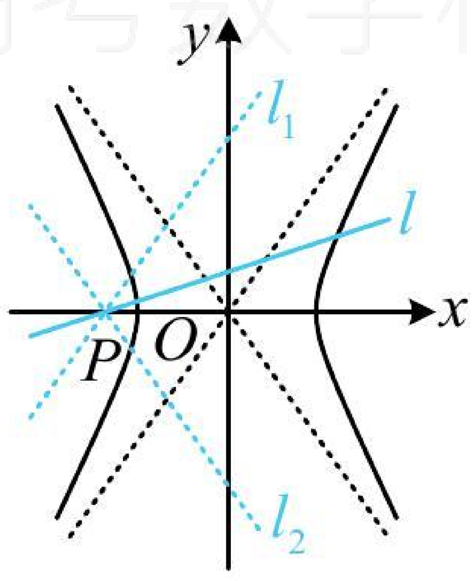


图3

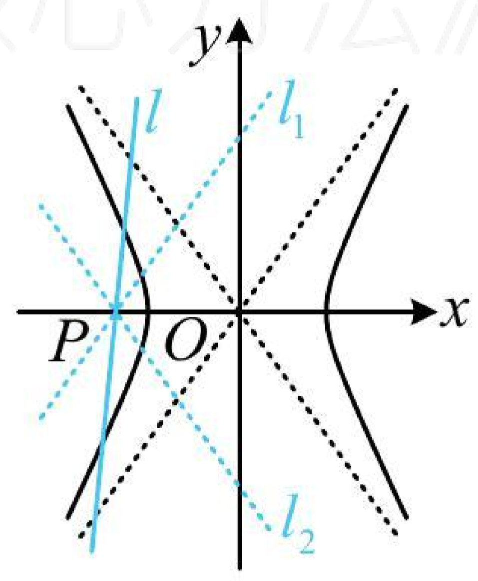


图4

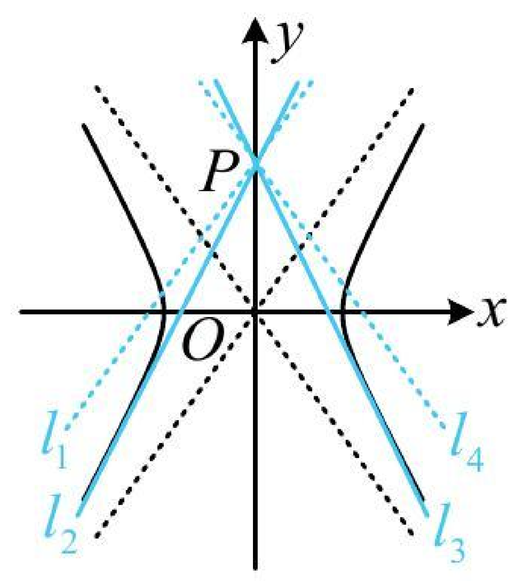


图5

2．渐近线的角度关系：如图 6，双曲线的两条渐近线关于 x 轴，y 轴对称，所以图 6 中左右两个角相等，设为 α，中间两个角也相等，设为 β，且 $\alpha+\beta=90^{\circ}$.

3．双曲线的两类特征三角形：

①如图 7，F 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，过 F 作一条渐近线的垂线，垂足为 A，则在 ΔAOF 中，$|AF|=b$，$|OA|=a$，$|OF|=c$，这个三角形有双曲线的全部特征，所以把 ΔAOF 称为双曲线的“特征三角形”，由对称性，这样的特征三角形有 4 个. 由于点 A 满足 $|OA|=a$，所以 A 在圆 $x^2+y^2=a^2$ 上，由 $OA\perp AF$ 可得 AF 是该圆的切线，若要求点 A 的坐标，可联立 $\begin{cases}y=\frac{b}{a}x\\x^2+y^2=a^2\end{cases}$ 求得 $\begin{cases}x^2=\frac{a^4}{c^2}\\y^2=\frac{a^2b^2}{c^2}\end{cases}$，所以图 7 中

点 A 的坐标为$(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c})$.

②如图 8，A 为双曲线的右顶点，过 A 作 x 轴的垂线交一条渐近线于点 B，则在 ΔAOB 中，$|OA|=a$，$|AB|=b$，$|OB|=c$，这个三角形也有双曲线的全部特征，所以把 ΔAOB 称为双曲线的“特征三角形”，由对称性，这样的特征三角形有 4 个.

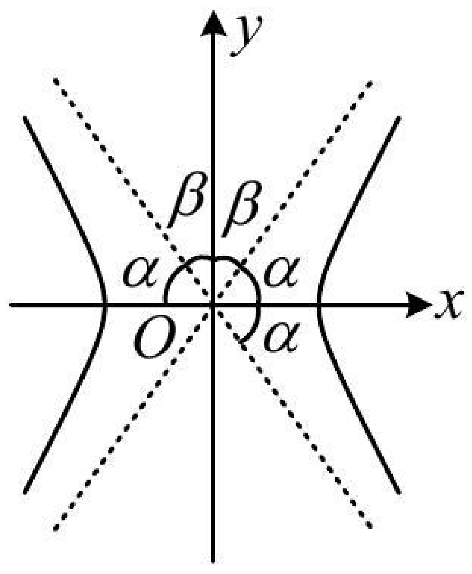


图6

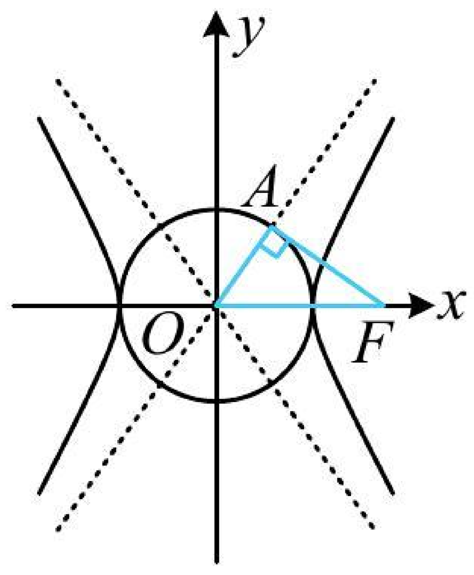


图7

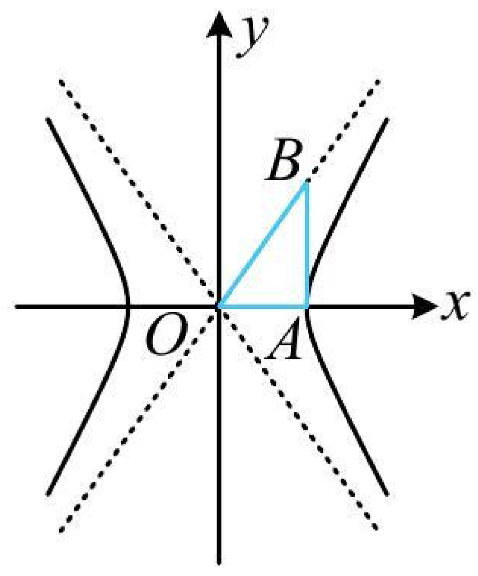


图8

典型例题

类型Ⅰ：借助渐近线进行图形分析

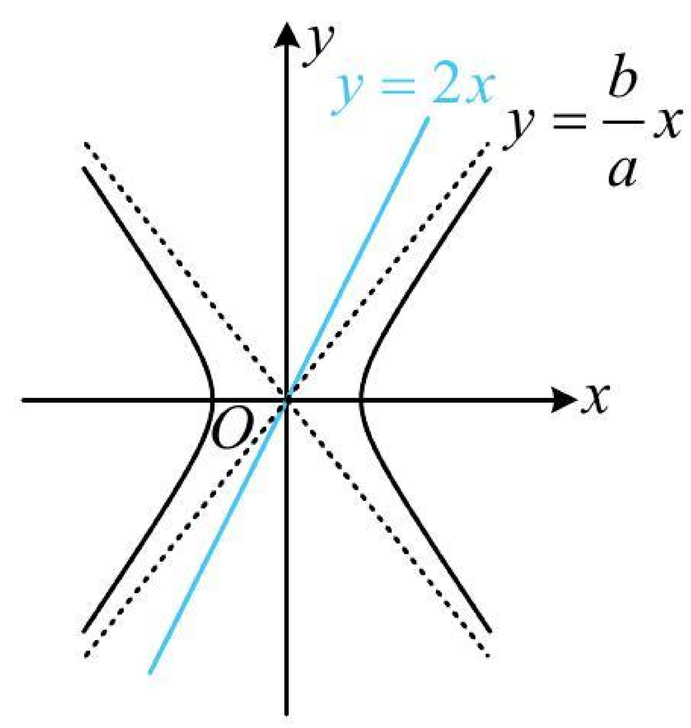
【例 1】（2022・全国甲卷）记双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 e，写出满足条件“直线 $y=2x$ 与 C 无公共点”的 e 的一个值_____.

解析：过原点的直线与双曲线没有交点的临界状态是渐近线，故可画图，比较斜率，

如图，直线 $y=2x$ 与 C 无公共点 $\Leftrightarrow \frac{b}{a}\le 2 \Leftrightarrow b\le 2a \Leftrightarrow b^2\le 4a^2 \Leftrightarrow c^2-a^2\le 4a^2 \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2}\le 5$，

所以 $e^2\le 5$，结合 $e>1$ 可得 $1<e\le\sqrt{5}$.

答案：2（答案不唯一，满足 $1<e\le\sqrt{5}$ 的 e 值均可）



【变式】已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦距为 $2c$，F_1，F_2 为其左、右两个焦点，直线 l 经过点 $(0,b)$ 且斜率为 1，若 l 上存在点 P 满足 $|PF_1|-|PF_2|=2b$，则 C 的离心率的取值范围为（　　）

（A）$(1,\sqrt{2})$　　（B）$(\sqrt{2},\sqrt{3})$　　（C）$(1,\sqrt{3})$　　（D）$(\sqrt{2},+\infty)$

解析：看到 $|PF_1|-|PF_2|=2b$，联想到点 P 在某双曲线（不是双曲线 C）上，该双曲线的焦点也是 F_1，F_2，但距离之差是定值 $2b$，相当于和原双曲线 C 相比，c 不变，把 a 和 b 交换即可，

由题意，满足$|PF_1|-|PF_2|=2b$的点 P 在双曲线$\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$的右支上，所以直线 l 与该双曲线右支有交点，

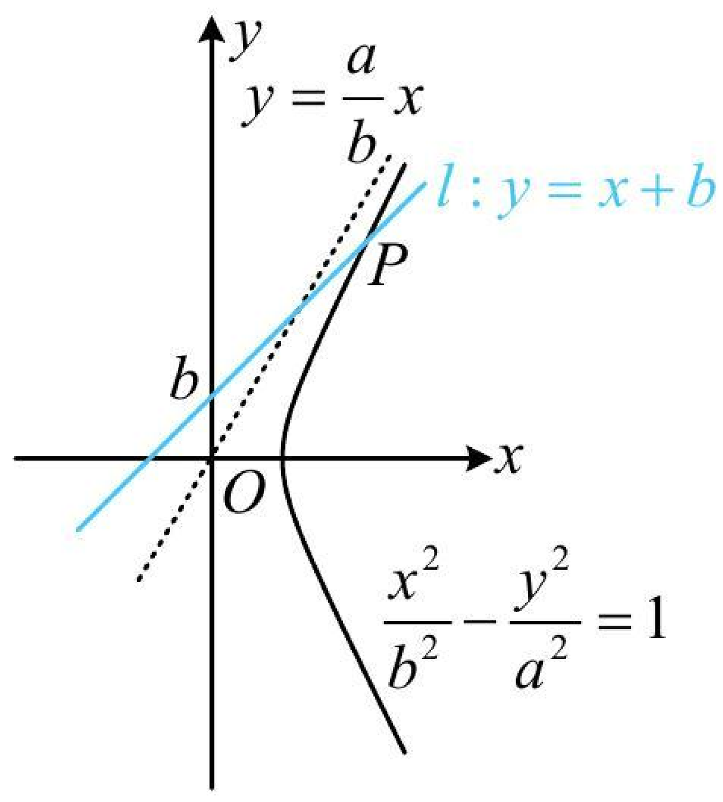
涉及直线与双曲线的交点问题，可借助渐近线来分析，

如图，则直线 l 的斜率是 1，双曲线$\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$渐近线是 $y=\pm\dfrac{a}{b}x$，

由图可知要使 l 与该双曲线右支有交点，只需$1<\dfrac{a}{b}$，所以$a>b$，从而$a^2>b^2=c^2-a^2$，故$\dfrac{c^2}{a^2}<2$，

所以$e<\sqrt{2}$，又$e>1$，所以$1<e<\sqrt{2}$.

答案：A



【反思】从上面两道题可以看出，涉及直线与双曲线的交点个数问题，常借助渐近线来分析临界状态.

【例 2】已知双曲线$C:\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，若直线$x=-b$与 C 的两条渐近线分别交于 A，B 两点，O 为原点，且$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角为60°，则 C 的离心率为（　　）

（A）2　　（B）$\dfrac{3}{2}$　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

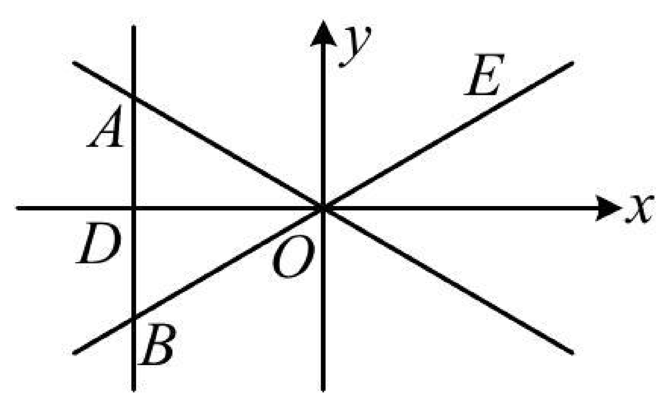
解析：如图，由所给向量的夹角可求得渐近线的倾斜角，进而求出斜率，

由题意，$\angle AOB=60^\circ$，设直线 AB 与 x 轴交于点 D，E 为渐近线上第一象限的一点，则$\angle BOD=30^\circ$，

所以$\angle EOx=\angle BOD=30^\circ$，故渐近线 BE 的倾斜角为30°，其斜率$\dfrac{a}{b}=\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以$b=\sqrt{3}a$，

从而$b^2=c^2-a^2=3a^2$，整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=4$，故离心率$e=\dfrac{c}{a}=2$.

答案：A



【变式】已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，以线段$F_1F_2$为直径的圆与 y 轴的正半轴交于点 B，连接F_1B，F_2B分别交双曲线的渐近线于点 E，F，若四边形 $OFBE$ 为平行四边形，

则 C 的离心率为_____.

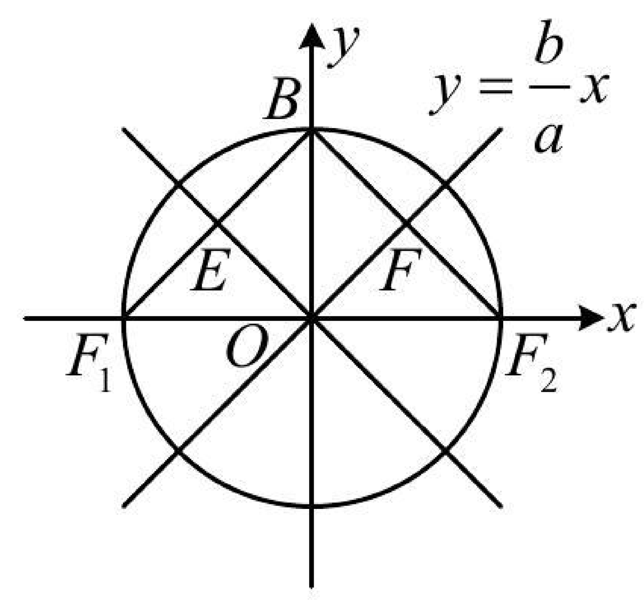
解析：如图，要求离心率，可先从几何关系分析渐近线的夹角，由题意，四边形 $OFBE$ 为平行四边形，

又 F_1F_2 是圆的直径，所以 $BF_1 \perp BF_2$，故四边形 $OFBE$ 为矩形，所以 $\angle EOF = 90^{\circ}$，

结合两条渐近线关于 y 轴对称知 $\angle FOB = 45^{\circ}$，所以 $\angle FOF_2 = 45^{\circ}$，

从而渐近线 OF 的斜率 $\dfrac{b}{a} = \tan 45^{\circ} = 1$，故 $a = b$，所以 $a^2 = b^2 = c^2 - a^2$，整理得：$\dfrac{c^2}{a^2} = 2$，故 $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{2}$.

答案：$\sqrt{2}$



【反思】①双曲线的两条渐近线分别关于 x 轴，y 轴对称，由此可得到一些特殊的角度相等关系，这也是渐近线最基础的几何性质；②两渐近线夹角为 90° 的双曲线是等轴双曲线，其离心率为 $\sqrt{2}$.

【例 3】已知 F 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 的右焦点，点 A 是 C 的左顶点，O 为原点，过 F 作 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 P，若 $\angle PAF = 30^{\circ}$，则 C 的离心率为_____.

解析：涉及渐近线，先考虑通过几何关系分析渐近线的倾斜角，

如图，渐近线为 $y = \dfrac{b}{a}x$，即 $bx - ay = 0$，右焦点 $F(c,0)$ 到渐近线的距离 $|PF| = \dfrac{|bc|}{\sqrt{b^2 + (-a)^2}} = \dfrac{|bc|}{c} = b$，

又 $|OF| = c$，所以 $|OP| = \sqrt{|OF|^2 - |PF|^2} = \sqrt{c^2 - b^2} = a$，因为 $|OA| = a$，所以 $|OP| = |OA|$，

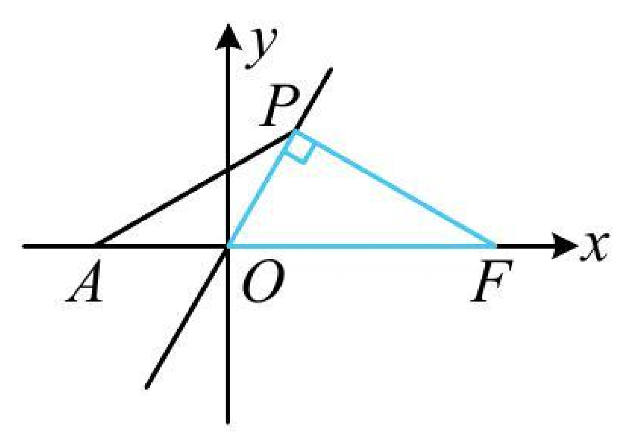
从而 $\angle APO = \angle PAO = 30^{\circ}$，故 $\angle POF = \angle PAO + \angle APO = 60^{\circ}$，

有了渐近线的倾斜角，可求其斜率，再转换成离心率即可，

所以渐近线 OP 的斜率 $\dfrac{b}{a} = \tan 60^{\circ} = \sqrt{3}$，从而 $b = \sqrt{3}a$，故 $b^2 = c^2 - a^2 = 3a^2$，

整理得：$\dfrac{c^2}{a^2} = 4$，所以 C 的离心率 $e = \dfrac{c}{a} = 2$.

答案：2



【反思】上图中的 ΔPOF 的三边长分别为 a，b，c，我们把它叫做双曲线的一个“特征三角形”，在后续的某些题目中，熟悉这一结论，可以迅速发现图形中的一些几何关系.

【变式 1】（2019 • 新课标 I 卷）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A，B 两点，若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则 C 的离心率为_____.

解法 1：条件中有向量的数量积，可考虑设坐标来算，如图，点 B 在渐近线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 上，

可设 $B(x_0,\dfrac{b}{a}x_0)$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，则 $\overrightarrow{F_1B}=(x_0+c,\dfrac{b}{a}x_0)$，$\overrightarrow{F_2B}=(x_0-c,\dfrac{b}{a}x_0)$，

所以 $\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=(x_0+c)(x_0-c)+\dfrac{b^2}{a^2}x_0^2=(1+\dfrac{b^2}{a^2})x_0^2-c^2=\dfrac{c^2}{a^2}x_0^2-c^2=0$，

解得：$x_0=a$ 或 $-a$（舍去），故 $B(a,b)$，

求得了 B，可由 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$ 求 A 的坐标，代入另一渐近线 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 即可建立方程求离心率，

由 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$ 知 A 为 F_1B 中点，所以 $A(\dfrac{a-c}{2},\dfrac{b}{2})$，代入 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 得：$\dfrac{b}{2}=-\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a-c}{2}$，

整理得：$c=2a$，故 C 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=2$.

解法 2：所给的数量积恰好为 0，可翻译为垂直，于是也可尝试分析几何特征，找渐近线的倾斜角，

如图，由 $\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$ 知 $BF_1\perp BF_2$，又 O 为 F_1F_2 中点，所以 $|OB|=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|=|OF_1|$，

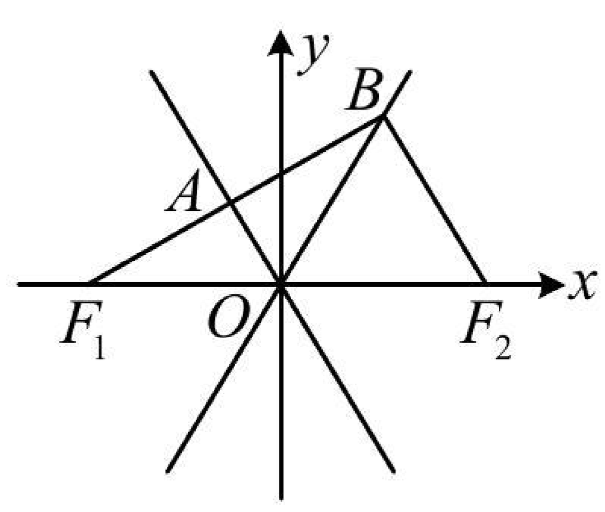
由 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$ 知 A 为 F_1B 中点，故 $\angle AOB=\angle AOF_1$，（原因：等腰三角形底边中线也是顶角的平分线）

又由渐近线的对称性，$\angle AOF_1=\angle BOF_2$，所以 $\angle AOB=\angle AOF_1=\angle BOF_2=60^\circ$，

从而渐近线 OB 的斜率 $\dfrac{b}{a}=\tan\angle BOF_2=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，故 $b=\sqrt{3}a$，

所以 $b^2=3a^2$，从而 $c^2-a^2=3a^2$，故 $e=\dfrac{c}{a}=2$.

答案：2



【变式 2】已知双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，圆 $O:x^2+y^2=a^2$ 与 E 的一条渐近线的一个交点为 M，若 $|MF_2|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|F_1F_2|$，则 E 的离心率为（　　）

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）$\sqrt{5}$　　（D）$\sqrt{6}$

解析：由对称性，不妨设 M 在 x 轴上方，有如图 1 和图 2 所示的两种情况，应先判断是哪种，

若为图 1，则 ΔMOF_2 是双曲线的一个特征三角形，所以 $|MF_2|=b<\frac{\sqrt{2}}{2}|F_1F_2|=\sqrt{2}c$，不合题意；

若为图 2，则 ΔMOF_1 是双曲线的一个特征三角形，

可抓住 $\angle MOF_1$ 和 $\angle MOF_2$ 互补，用“双余弦法”建立方程求离心率，

在 ΔMOF_1 中，$|OM|=a$，$|OF_1|=c$，且 $OM\perp MF_1$，所以 $\cos\angle MOF_1=\frac{a}{c}$，

在 ΔMOF_2 中，$|MF_2|=\frac{\sqrt{2}}{2}|F_1F_2|=\sqrt{2}c$，$|OF_2|=c$，所以 $\cos\angle MOF_2=\frac{|OM|^2+|OF_2|^2-|MF_2|^2}{2|OM|\cdot|OF_2|}=\frac{a^2-c^2}{2ac}$，

由图可知 $\angle MOF_1=\pi-\angle MOF_2$，所以 $\cos\angle MOF_1=\cos(\pi-\angle MOF_2)=-\cos\angle MOF_2$，

故 $\frac{a}{c}=-\frac{a^2-c^2}{2ac}$，整理得：$\frac{c^2}{a^2}=3$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$.

答案：B

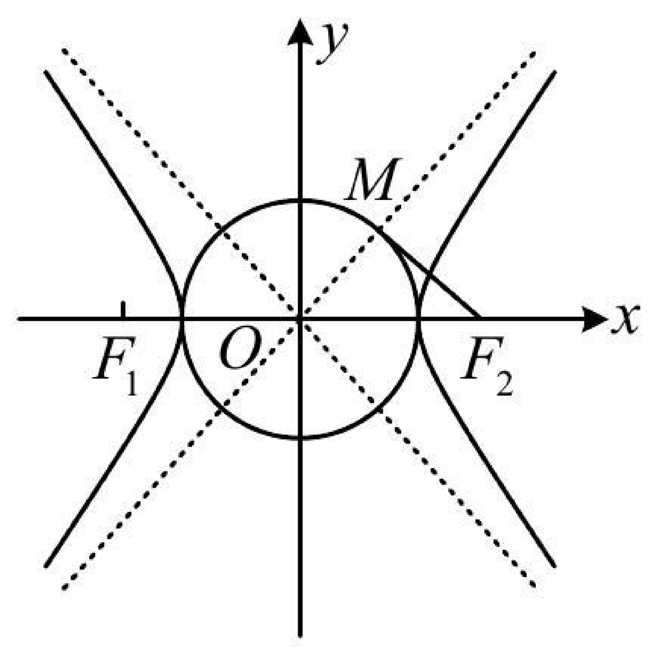


图1

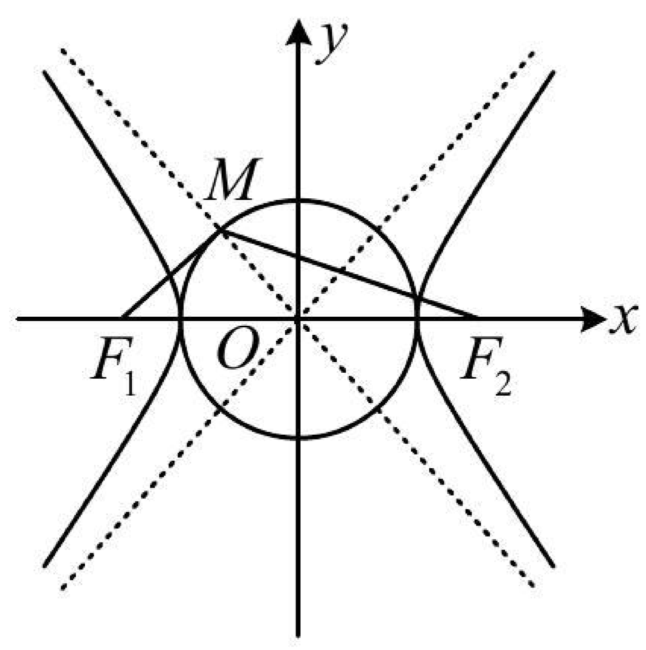


图2

【总结】由例 3 及其变式可发现，渐近线问题中对于几何条件的翻译和做法，与前面小节大同小异.

类型 II：渐近线相关的综合运算

【例 4】已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F，过 F 且与 x 轴垂直的直线 l 与双曲线交于 A，B 两点，交双曲线的渐近线于 C、D 两点，$|CD|=\sqrt{2}|AB|$，则双曲线的离心率为_____.

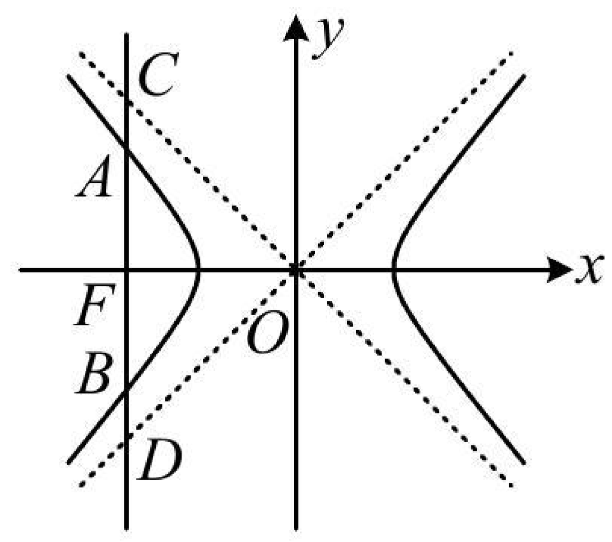
解析：求出 $|AB|$ 和 $|CD|$，即可建立方程求离心率，求 $|AB|$ 可用通径公式，算 $|CD|$ 可联立求坐标，

由题意，$|AB|=\frac{2b^2}{a}$，$l:x=-c$，联立 $\begin{cases}y=-\frac{b}{a}x\\x=-c\end{cases}$ 解得：$y=\frac{bc}{a}$，如图，$y_C=\frac{bc}{a}$，由对称性知 $|CD|=\frac{2bc}{a}$，

因为 $|CD|=\sqrt{2}|AB|$，所以 $\frac{2bc}{a}=\sqrt{2}\cdot\frac{2b^2}{a}$，从而 $c=\sqrt{2}b$，故 $c^2=2b^2=2c^2-2a^2$，

整理得：$\frac{c^2}{a^2}=2$，所以双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.

答案：$\sqrt{2}$



【例 5】（2022·浙江卷）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F，过 F 且斜率为 $\dfrac{b}{4a}$ 的直线交双曲线于点 $A(x_1,y_1)$，交双曲线的渐近线于点 $B(x_2,y_2)$，且 $x_1<0<x_2$，若 $|FB|=3|FA|$，则双曲线的离心率是______.

解析：如图，B 的坐标可联立直线 AB 和渐近线方程来求，先求 B，

由题意，$F(-c,0)$，直线 AB 的方程为 $y=\dfrac{b}{4a}(x+c)$，联立 $\begin{cases} y=\dfrac{b}{4a}(x+c) \\ y=\dfrac{b}{a}x \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} x=\dfrac{c}{3} \\ y=\dfrac{bc}{3a} \end{cases}$，所以 $B(\dfrac{c}{3},\dfrac{bc}{3a})$，

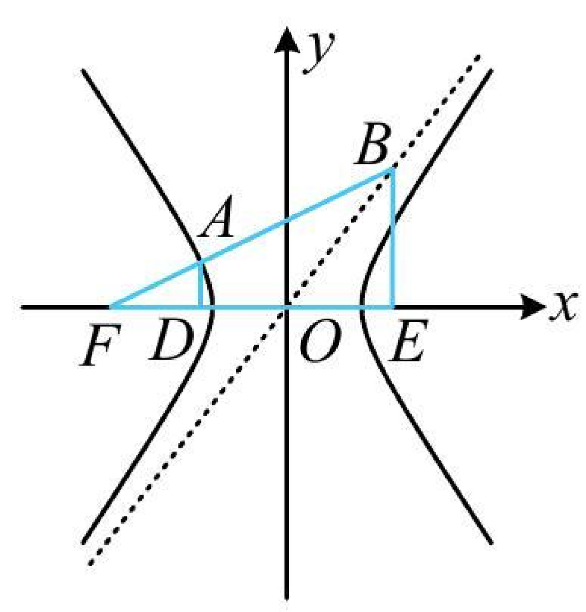
题干给出 $|FB|=3|FA|$，可由此构造相似三角形求得 A 的坐标，代入双曲线即可建立方程求离心率，

作 $AD\perp x$ 轴于 D，$BE\perp x$ 轴于 E，则 $\Delta FAD \backsim \Delta FBE$，且 $E(\dfrac{c}{3},0)$，$|EF|=\dfrac{4c}{3}$，$|BE|=\dfrac{bc}{3a}$，

因为 $|FB|=3|FA|$，所以 $\dfrac{|FD|}{|EF|}=\dfrac{|AD|}{|BE|}=\dfrac{1}{3}$，故 $|FD|=\dfrac{1}{3}|EF|=\dfrac{4c}{9}$，$|OD|=|OF|-|FD|=\dfrac{5c}{9}$，$|AD|=\dfrac{1}{3}|BE|=\dfrac{bc}{9a}$，

所以 $A(-\dfrac{5c}{9},\dfrac{bc}{9a})$，代入 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 可得：$\dfrac{25c^2}{81a^2}-\dfrac{b^2c^2}{81a^2b^2}=1$，整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{27}{8}$，故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$.

答案：$\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$



【总结】从上面两道题可以看出，渐近线有关问题，若不便从几何角度分析，也可用其方程参与运算，按代数的方法来求解问题，但这样做计算量往往更大一些，为次选方案.

强化训练

1．（2023·北京模拟·★★）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一个焦点为$(\sqrt{5},0)$，且与直线$y=\pm 2x$没有公共点，则双曲线的方程可以为_____.（填一个满足要求的双曲线方程即可）

2．（2023·重庆二模·★★）已知点$P(1,2)$和双曲线$C:x^2-\frac{y^2}{4}=1$，过点P且与双曲线C只有1个公共点的直线有（　　）

（A）2条　（B）3条　（C）4条　（D）无数条

3．（2022·江苏南京模拟·★★）已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则此双曲线的离心率为_____.

4．（2022·江苏南京模拟·★★）椭圆$C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$与双曲线$C_2:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率之积为1，则$C_2$的两条渐近线的倾斜角分别为（　　）

（A）$\frac{\pi}{6}$，$-\frac{\pi}{6}$　（B）$\frac{\pi}{3}$，$-\frac{\pi}{3}$　（C）$\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$　（D）$\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$

5．（2020 • 新课标Ⅱ卷 • ★★★）设 O 为坐标原点，直线 $x=a$ 与双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于 D，E 两点，若 ΔODE 的面积为 8，则 C 的焦距的最小值为（　　）

（A）4　（B）8　（C）16　（D）32

6．（2022 • 广东珠海模拟 • ★★★）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 A 在 C 的过第二、四象限的渐近线 l 上，且 $AF_2\perp l$，若 $|BF_2|-|BF_1|=2a$，$\overrightarrow{F_2B}+2\overrightarrow{BA}=\vec{0}$，则 C 的离心率为（　　）

（A）$\sqrt{2}$　（B）$\sqrt{5}$　（C）$\sqrt{6}$　（D）$2\sqrt{2}$

7．（2023 •福建统考 •★★★）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$，左、右焦点分别为 F_1，F_2，F_2 关于 C 的一条渐近线的对称点为 P，若 $|PF_1|=2$，则 ΔPF_1F_2 的面积为（　　）

（A）2　（B）$\sqrt{5}$　（C）3　（D）4

8．（2022 • 江西南昌模拟 • ★★★）双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，在 C 的渐近线上存在一点 M，使 $\angle OMF_2=90^{\circ}$，且 M 在第一象限，若 $|MF_1|=3|MF_2|$，则 C 的离心率为_____.

9．（★★★）双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，过$F$作一条渐近线的垂线$l$，垂足为$M$，若$l$与另一条渐近线的交点是$N$，且$\overrightarrow{MN}=5\overrightarrow{MF}$，则$C$的离心率为_____.

10．（2022・河南新安模拟・★★★）已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线与圆$A:(x-a)^2+y^2=b^2$交于$P$，$Q$两点，$O$为原点，若$Q$为$OP$中点，则$C$的离心率为（　　）

（A）$\sqrt{2}$　（B）$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　（C）$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　（D）$\sqrt{3}$